262 : Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications.

Développements :

Limite de variables aléatoires gaussiennes, Théorème central limite.

Bibliographie :

Bernis, Barbe Ledoux, Candelpergher, Ouvrard ?

Rapport du jury :

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury. Les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite) doivent être énoncés. On peut par ailleurs exiger de connaître au moins l'architecture des preuves. L'étude de maximum et minimum de n variables aléatoires indépendantes et de même loi peut nourrir de nombreux exemples. Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de Borel-Cantelli, les fonctions génératrices, . . .) ou donner des inégalités de grandes déviations. Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de Kolmogorov peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

Remarque 1. *Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour un $d \geq 1$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X désignent une suite de va et une va définies sur cet espace probabilisé.*

1 Héritage de la théorie de la mesure : convergence presque sûre, convergence en probabilité et convergence L^p

1.1 Convergence presque sûre

Définition 2 (Candel p262)**.** *[Barbe Ledoux p115] Convergence presque sûre. Notation.*

Proposition 3 (Barbe Ledoux p116)**.** *On a convergence presque sûre si et seulement si*
$\forall\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(limsup_{n\to\infty}|Xn - X| \geq \epsilon) = 0$ *si et seulement si*
$\forall\epsilon > 0, lim_{n\to\infty}\mathbb{P}sup_{k\geq n}|X_k - X| \geq \epsilon = 0$ *si et seulement si*
(Critère de Cauchy) $\forall\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{m\geq n} \{|X_n - X_m| < \epsilon\}) = 1$.

Exemple 4 (Barbe)**.** *Exemple avec des lois de Bernoulli.*

Proposition 5 (Ouvrard p90)**.** *Unicité de la limite presque sûre.*

Proposition 6 (Barbe p122)**.** *Compatibilité de la convergence presque sûre avec une application continue, avec la somme et le produit.*

Proposition 7 (Barbe p117)**.** *[Candel p263] Lemme de Borel Cantelli. Rappeler le vrai lemme ?*

Exemple 8 (Candel p246)**.** *Soit $(X_n)_n$ une suite de va centrées de variances majorées par une même constante. Alors $(X_n/n)_n$ converge ps vers 0.*

Contre exemple 9 (Candel p263)**.** *[Ouvrard p92] Suite qui converge ps et dont la série des $\mathbb{P}(\{|X_n - X|\} > \epsilon)$ diverge.*

Exemple 10 (Barbe p118)**.** *Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. iid de loi $exp(1)$ donnée par la densité $f(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$. Alors $\max_{1\leq i\leq n}(X_i)/ln(n) \to P$ ps .*

Exemple 11 (Barbe p113)**.** *Bernoulli de paramètre p_n et convergence de la série.*

Proposition 12. *Inégalité de Hoeffding et convergence ps.*

1.2 Convergence en probabilité

Définition 13 (Barbe p119)**.** *[Candel p264] Convergence en probabilité.*

Proposition 14 (Ouvrard p90)**.** *[Candel p264] Unicité de la limite en probabilité.*

Proposition 15 (Barbe p122)**.** *Compatibilité de la convergence presque sûre avec une application continue, avec la somme et le produit.*

Proposition 16 (Candel p265)**.** *La converge presque sûre implique la convergence en probabilité. La convergence en proba implique la convergence ps d'une sous-suite.*

Exemple 17 (Barbe)**.** *Reprendre l'exemple des Bernoulli avec les p_n.*

Exemple 18 (Barbe)**.** *$1/nS_n$ converge en proba vers 0 (hypothèses sur les X_n !).*

Contre exemple 19 (Candel p266)**.** *[Ouvrard p93] Pour $(X_n)_n$ des v.a. indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$, avec $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$, (X_n) converge en probabilité vers la v.a. constante 0, mais ne converge pas $\mathbb{P}$-p.s vers 0 car les évènements $\mathbb{P}(X_n = 1)$ sont indépendants et de somme infinie.*
Donner la sous-suite qui converge.

Proposition 20 (Barbe p122). *[Ouvrard p92] Critère de Cauchy.*

Proposition 21 (Barbe p121). *Métrisabilité de la convergence en probabilité. Pour $d(X,Y) = E[inf(|X-Y|,1)]$, d est une distance sur l'ensemble des v.a. $\Omega \to \mathbb{R}^d$. On a de plus : $X_n \to^P X$ si et seulement si $d(X_n, X) \to 0$.*

Remarque 22. *La convergence ps n'est pas métrisable.*

1.3 Convergence dans L^p et uniforme intégrabilité

Définition 23 (Barbe p39). *Définition de L^p, de $||.||_p$ pour $p \in [1, +\infty[$.*

Proposition 24 (Barbe p39). *$||.||_p$ est une norme et L^p est complet. (Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy).*

Définition 25 (Barbe p124). *Converger dans L^p.*

Proposition 26 (Ouvrard p99). *Pour $q \geq p$,*
$L^p \subset L^q \subset L^1$.
La convergence L^p implique la convergence L^q implique la convergence en proba.

Contre exemple 27 (Barbe p125). *Pour X_n indépendantes avec $\mathbb{P}(X_n = n^c) = 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ pour un certain $c > 0$, $X_n \to^P 0$, mais $||X_n||_p = n^{c-1/p}$ diverge si $c > 1/p$.*

Proposition 28 (Barbe Pagès). *Si $(X_n)_n$ converge vers X en norme L^q, alors il existe une extractrice de $(X_n)_n$ qui converge vers X $\mathbb{P}$-p.s.*

Contre exemple 29. *Le même que pour les intégrales ?*

Proposition 30 (Ouvrard p98). *La limite est unique.*

Définition 31 (Barbe p125). *Suite uniformément intégrable.*

Exemple 32 (Barbe p125). *Une famille finie est UI, une famille telle que $|X_n| \leq Y$ ps et Y est intégrable est UI.*

Proposition 33 (Barbe p126). *Critère d'UI.*

Théorème 34 (Barbe p126). *[Ouvrard] Théorème de Vitali.*

Corollaire 35 (Barbe p128).

2 Convergence en loi

2.1 Définitions et propriétés

Définition 36 (Zuily p515). *Convergence en loi avec toute fonction continue bornée, $E(f(X_n)) \to E(f(X))$.*

Proposition 37 (Zuily p515). *Les 4 équivalences.*

Contre exemple 38 (Candel p267). *Si f n'est pas continue.*

Exemple 39 (Candel p274). *Suites qui ne converge pas en loi avec un max. Celle qui converge.*

Exemple 40. *Pour X_n de loi $N(a_n, \sigma_n^2)$ avec $a_n \to a$ et $\sigma_n^2 \to \sigma > 0$, alors X_n converge en loi vers $N(a, \sigma^2)$.*

Remarque 41 (Candel p270). *X_n et X ne sont pas forcément définies sur le même espace. Ne pas conclure X_n converge en loi vers X donc $X_n - X$ converge en loi vers 0.*

Proposition 42 (Barbe p130). *[Candel p269] Convergence ps implique la convergence en loi.*

Contre exemple 43 (Barbe p130). *[ZQ] Si X suit une loi normale $N(0,1)$ et $X_n = (-1)^n X$ alors X_n converge en loi vers X mais ne converge pas ps ni en proba vers X.*
Va de Rademacher et $X_n = -X$.

Proposition 44 (Barbe p130). *Si X_n converge en loi vers une constante alors X_n converge en proba vers cette constante.*

Proposition 45 (Candel). *Si X_n converge en loi, $f(X_n)$ aussi.*

Théorème 46 (Ouvrard p335). *Théorème de Slutsky.*

Proposition 47. *Convergence en loi pour des va à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou à densité.*

2.2 Fonctions caractéristiques et théorème de Lévy

Proposition 48 (Barbe p129). *Théorème de Lévy.*

Contre exemple 49 (Candel p278).

Proposition 50 (Barbe p130). *Convergence en proba implique la convergence en loi. Donc la convergence L^p implique la convergence en loi.*

Proposition 51 (Bernis). *Limite de variables aléatoires gaussiennes.*

3 Théorèmes limites

3.1 Loi faible des grands nombres et applications

Proposition 52 (Barbe p140). *Loi faible des grands nombres.*

Application 53 (Ouvrard p108). *Pour X_1 de loi de Bernoulli de paramètre p, $(X_1 + .. + X_n)/n$ qui est de loi $Bin(n, p/n)$ converge en probabilités vers la v.a. constante p.*

Proposition 54 (Ouvrard p11)**.** *[Barbe p140] Loi forte des grands nombres. (Ne pas parler de la convergence dans L^2, pas encore défini).*

Remarque 55. *La moyenne empirique $(X_1 + .. + X_n)/n$ permet ainsi d'estimer $E[X1]$ de façon consistante.*

Application 56 (Ouvrard p128)**.** *[Candel p310,334] Méthode de Monte Carlo.*

Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable. On note $I = \int_{[0,1]^d} f(x) d\lambda(x)$. Pour $X_{n,k}$ des v.a. réelles iid de loi $U[0,1]$, on construit $Yn := (X_{n,1}, .., X_{n,d})$ qui est une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $[0,1]^d$. On note $S_n = (f(Y_1) + .. + f(Y_n))/n$. Alors, pour tout$0 < \epsilon \leq ((||f||_2/||f||_\infty)^2$ assez petit, on a : $\mathbb{P}(I - S_n > \epsilon) \leq 2exp(-n(\epsilon||f||_\infty/||f||_2)^2)$. L'approximation de l'intégrale de f par le barycentre de n évaluations données par des v.a. uniformes a ainsi une probabilité de ne pas être ϵ-proche de l'intégrale de$f$ qui décroît exponentiellement en n.

Exemple 57. *Prendre des exemples dans les exercices du Candel.*

3.2 Théorème central limite et applications

Théorème 58. *Théorème central limite.*

Application 59. *Application du TCL à la détermination d'un intervalle de confiance*

Application 60. *Formule de Stirling.*